

**Examenul de bacalaureat 2012**  
**Proba E. c)**  
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Model**

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**

**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

**I. FELADAT**

**(30 punct)**

- 5p 1. Határozd meg az  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+1| \leq 24\}$  halmaz elemeinek számát!
- 5p 2. Határozd meg az  $y = 2x - 1$  egyenes és az  $y = 2x^2 - 3x + 1$  parabola metszéspontjainak koordinátáit!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $\sqrt[3]{1+7x} = 1+x$  egyenletet!
- 5p 4. Adott az  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  halmaz. Határozd meg az  $A$  halmaz azon háromelemű részhalmazainak számát, amelyekben pontosan két páratlan szám van!
- 5p 5. Határozd meg az  $[AB]$  szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, ha  $A(1, -2)$  és  $B(3, 4)$ .
- 5p 6. Ha  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  és  $\cos 2x = \frac{1}{3}$ , számítsd ki  $\sin x$  értékét!

**II. FELADAT**

**(30 pont)**

1. Adott az 
$$\begin{cases} x + my + m^2z = 0 \\ mx + m^2y + z = 0 \\ m^2x + y + mz = 0 \end{cases}$$
 egyenletrendszer,  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Határozd meg az  $m$  azon értékeit, amelyekre az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nulla!
- 5p b) Igazold, hogy az  $m$  egyetlen értéke esetén sincs az egyenletrendszernek olyan  $(x_0, y_0, z_0)$  megoldása, amelyre  $x_0, y_0, z_0 > 0$ .
- 5p c) Igazold, hogy bármely  $m \in \mathbb{R}$  esetén az egyenletrendszer mátrixának rangja 2-től különböző!
2. Az  $\mathbb{R}$  halmazon értelmezzük az  $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$  műveletet.
- 5p a) Ellenőrizd, hogy asszociatív-e a „\*” művelet!
- 5p b) Igazold, hogy a „\*” műveletnek van semleges eleme!
- 5p c) Oldd meg az  $x * x * x = 3$  egyenletet!

**III. FELADAT**

**(30 pont)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  függvény.
- 5p a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(-x)}$  határértéket!
- 5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény csökkenő a  $[-1, 1]$  intervallumon!
- 5p c) Határozd meg az  $m \in \mathbb{R}$  azon értékét, amelyre az  $f(x) = m$  egyenletnek három különböző valós gyöke van!
2. Adott az  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$  sorozat.
- 5p a) Számítsd ki  $I_2$  értékét!
- 5p b) Igazold, hogy az  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergens!
- 5p c) Igazold, hogy bármely  $n \geq 2$  esetén  $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ .